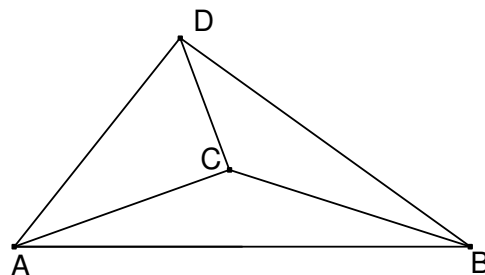


§14. Čtyřstěn

Def.: Zvolme v prostoru body A, B, C, D , které neleží v jedné rovině. Čtyřstěnem $ABCD$ rozumíme množinu bodů, které jsou ohraničené trojúhelníky $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$. Tyto trojúhelníky tvoří stěny čtyřstěnu $ABCD$, úsečky AB, AC, AD, BC, BD, CD jsou jeho hranami a body A, B, C, D jeho vrcholy.



Pozn.: Ty hrany čtyřstěnu, které nejsou různoběžné, ale mimoběžné, se nazývají protější hrany čtyřstěnu. V čtyřstěnu $ABCD$ jsou tři dvojice protějších hran $(AB, CD), (AC, BD), (AD, BC)$.

V.14.1.: Středů všech tří úseček, které spojují vždy středy dvou protějších hran čtyřstěnu, splývají.

Def.: Spojnice lib. vrcholu čtyřstěnu s těžištěm protější stěny, se nazývá těžnice čtyřstěnu.

V.14.2.: Všechny čtyři těžnice čtyřstěnu procházejí jedním bodem (tzv. těžištěm čtyřstěnu), který dělí každou těžnici v poměru 3:1.

Def.: Úsečka procházející vrcholem čtyřstěnu, která je kolmá na rovinu, v níž leží protější stěna čtyřstěnu, se nazývá výška čtyřstěnu.

V.14.3.: Výšky čtyřstěnu $ABCD$ vedené body A, D jsou právě tehdy různoběžné, je-li hrana AD kolmá k protější hraně BC . Je-li tato podmínka splněna, leží průsečík V výšek čtyřstěnu vedených body A, D na přímce, která je s oběma přímkami AD, BC různoběžná a k nim kolmá.

Pozn.: Výšky čtyřstěnu $ABCD$ vedené body A, D jsou právě tehdy různoběžné, jsou-li různoběžné výšky čtyřstěnu vedené body B, C . To nastane právě tehdy, když jsou přímky AD a BC navzájem kolmé.

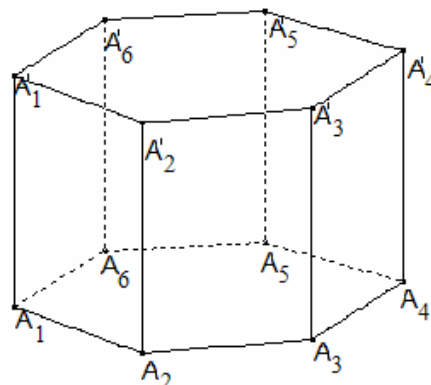
V.14.4.: V čtyřstěnu mohou nastat právě tyto 3 navzájem se vylučující situace:

- Žádné dvě protější hrany čtyřstěnu nejsou navzájem kolmé a každé dvě výšky čtyřstěnu jsou mimoběžné.
- Pouze jedna dvojice protějších hran čtyřstěnu je tvořena dvojicí navzájem kolmých přímek, výšky čtyřstěnu vedené vrcholy na každé z těchto hran jsou různoběžné, každé dvě jiné výšky čtyřstěnu jsou mimoběžné.
- Každé dvě protější hrany čtyřstěnu jsou navzájem kolmé, všechny čtyři výšky čtyřstěnu procházejí jedním bodem. Takovýto bod čtyřstěnu se nazývá ortocentrum a takovýto čtyřstěn ortocentrický.

§15. Hranol, Válec

Def.: Hranol

Mějme v prostoru rovinu ρ , v ní konvexní mnohoúhelník $A_1A_2A_3\dots A_n$ a necht' A_1' je bod, který v rovině ρ neleží. Necht' $T: E_3 \rightarrow E_3$ je takové posunutí, že $A_1' = T(A_1)$. Při tomto zobrazení se rovina ρ zobrazí na rovinu ρ' , tyto dvě roviny jsou rovnoběžné. Množinu všech bodů X , všech úseček BB' takových, že $B \in A_1A_2A_3\dots A_n$ a B' je obraz bodu B v posunutí T , nazýváme hranolem.



Mnohoúhelníky $A_1A_2A_3\dots A_n$ a $A_1'A_2'A_3'\dots A_n'$

nazýváme podstavami, rovnoběžníky $A_iA_{i+1}A_{i+1}'A_i'$, kde $(i \in \{1, 2, \dots, n\}, n+1 \rightarrow 1)$ nazýváme bočními stěnami hranolu. Všechny boční stěny tvoří plášť hranolu. Podstavy spolu s bočními stěnami tvoří stěny hranolu. Úsečky A_iA_i' (respektive $A_iA_{i+1}, A_i'A_{i+1}'$) se nazývají boční (respektive podstavné) hrany hranolu. Body $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ a $A_1', A_2', A_3', \dots, A_n'$ se nazývají vrcholy.

Pozn.: Podle hodnoty n rozlišujeme hranoly na trojboký, čtyřboký, ..., n -boký hranol.

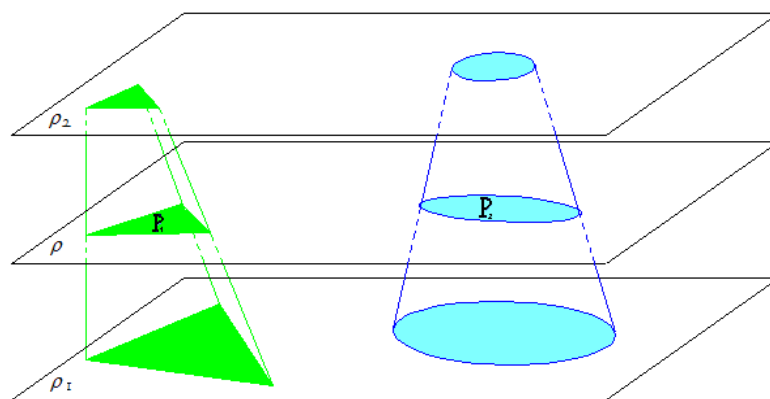
Def.: Je-li směr posunutí kolmý k rovině podstavy, mluvíme o hranolu kolmém, jinak jde o hranol kosý. Kolmý hranol, jehož podstavami jsou pravidelné n -úhelníky, se nazývá pravidelný n -boký hranol. Hranol, jehož podstavy jsou rovnoběžníky, se nazývá rovnoběžnostěn. Rovnoběžnostěn, jehož všechny stěny jsou pravoúhelníky (resp. čtverce), nazýváme kvádr (respektive krychle).

Pozn.: Čtyři zřejmé vlastnosti objemu $V(T)$ tělesa T :

- Dvě shodná tělesa mají tentýž objem.
- Skládá-li se těleso T z nepřekrývajících se těles T_1, T_2 , je objem tělesa T součtem objemů těles T_1, T_2 : $V(T) = V(T_1) + V(T_2)$.
- Za jednotku objemu bereme objem krychle o hraně délky 1.
- Cavalieriho princip:

Necht' tělesa T_1, T_2 leží mezi dvěma rovnoběžnými rovinami ρ_1, ρ_2 a každá rovina ρ rovnoběžná s rovinami ρ_1, ρ_2 protne tělesa T_1, T_2 v konvexních rovinných útvarech s obsahy P_1, P_2 . Jestliže pro každou rovinu ρ platí, že $P_1 = P_2$, mají tělesa T_1, T_2 stejný objem.

Jestliže pro každou rovinu ρ platí, že $P_1 = m \cdot P_2$, kde m je pevné číslo z R^+ , nezávislé na volbě roviny ρ , je objem tělesa T_1 m -násobkem objemu tělesa T_2 : $V(T_1) = m \cdot V(T_2)$

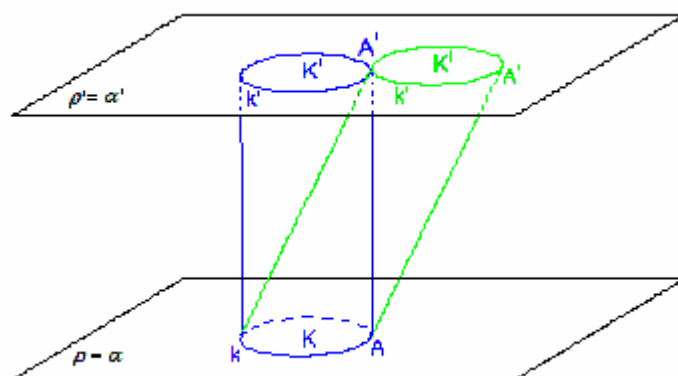


V.15.1.: Necht' P je obsah podstavy a Q je obsah pláště, v je vzdálenost rovin obou podstav, o je obvod n -úhelníku podstavy, pak pro objem V a povrch S hranolu platí:
 $V = P \cdot v, S = 2P + Q$ (-pro každý hranol, pro kolmý hranol: $S = 2P + o \cdot v$).

Def.: Válec

Mějme v prostoru rovinu ρ , v ní kruh K ohraničený kružnicí k , na kružnici k leží bod A a necht' A' je bod, který v rovině ρ neleží. Necht' $T: E_3 \rightarrow E_3$ je takové posunutí, že $A' = T(A)$. Označme $T(\rho) = \rho', T(k) = k', T(K) = K'$.

Všechny body všech úseček XX' , kde $X \in K$ a X' je obraz bodu X , vytvoří válec. Omezíme-li se pouze na body X ležící na kružnici k , dostaneme plášť válce. Kruhy K, K' tvoří podstavy válce. Je-li směr posunutí T kolmý k rovině ρ , mluvíme o kolmém válci, v opačném případě o kosém válci.



V.15.2.: Pro kolmý válec s poloměrem podstavy r a výškou v platí:

$$P = \pi \cdot r^2$$

$$Q = 2\pi \cdot r \cdot v$$

$$S = 2\pi \cdot r \cdot v + 2\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot r \cdot (v + r)$$

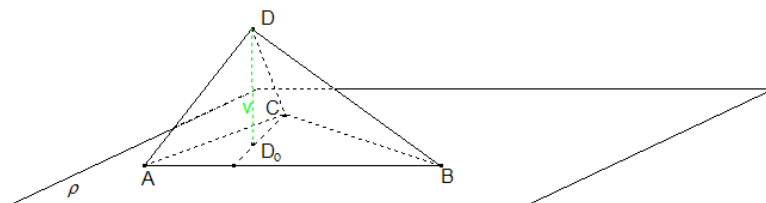
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot v \text{ (platí pro každý válec)}$$

§16. Jehlan, Kužel

Def.: Jehlan

Mějme v prostoru rovinu ρ , v ní konvexní mnohoúhelník $A_1A_2A_3\dots A_n$ a necht' V je bod, který v rovině ρ neleží. Množinu všech bodů všech úseček VX , kde X probíhá všemi body mnohoúhelníku $A_1A_2A_3\dots A_n$, nazýváme jehlanem (n -bokým jehlanem). Bod V se nazývá hlavním vrcholem jehlanu, jeho dalšími vrcholy jsou $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Mnohoúhelník $A_1A_2A_3\dots A_n$ je podstava jehlanu. Trojúhelníky $A_iA_{i+1}V$, ($i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$) a A_nA_1V jsou bočními stěnami jehlanu. Úsečky A_iV ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) jsou bočními hranami jehlanu. Úsečky A_iA_{i+1} jsou podstavnými hranami. Boční stěny tvoří plášť jehlanu.

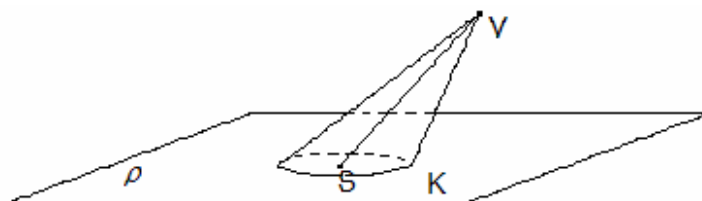
Jehlan se nazývá pravidelný, jestliže je jeho podstavou pravidelný mnohoúhelník a jeho hlavní vrchol má stejně velké vzdálenosti od všech vrcholů podstavy.



Pozn.: Trojboký jehlan není nic jiného než čtyřstěn. Každý jeho vrchol může být hlavním vrcholem, každá stěna podstavou.

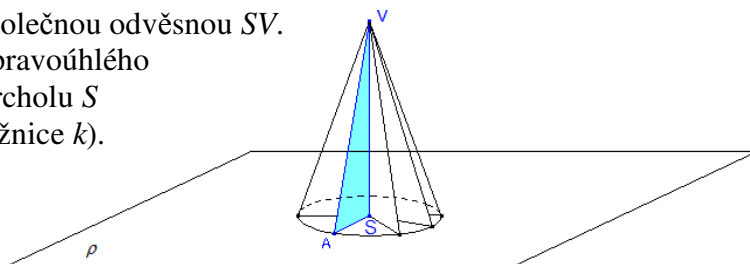
Def.: Kužel

Necht' v rovině ρ je kruh K s hraniční kružnicí k a středem S a mimo rovinu ρ bod V . Množina všech bodů všech úseček VX , $X \in K$, tvoří těleso, které se nazývá kužel. Jestliže $X \in k$, tvoří body úseček VX plášť kužele, kruh K je podstavou kužele, bod V je vrcholem kužele. Je-li přímka $\leftrightarrow SV \perp \rho$, nazývá se kužel kolmý (rotační).

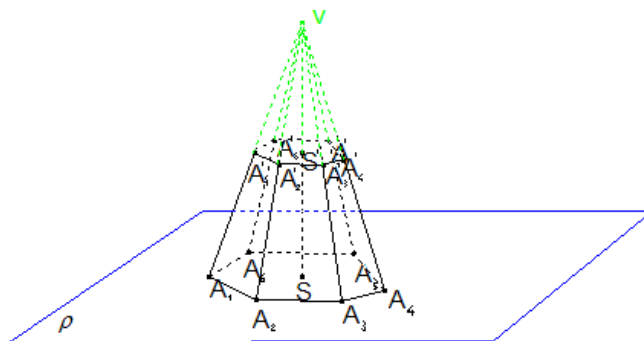


Pozn.: a) V případě rotačního kužele jsou všechny úsečky VX , kde $X \in k$, shodné. Jsou to přepony pravoúhlých trojúhelníků se společnou odvěsnou SV .

b) Rotační kužel vzniká také otáčením pravoúhlého trojúhelníku SVA s pravým úhlem při vrcholu S kolem jeho odvěsny SV (A -lib. bod kružnice k).



Def.: Necht' je dán jehlan hlavním vrcholem V a podstavou $A_1A_2A_3\dots A_n$ v rovině ρ . Zvolme číslo $k > 0, k \neq 1, k \in R$. Necht' obrazem uvažovaného jehlanu ve stejnolehlosti se středem V a koeficientem k je jehlan $A_1'A_2'A_3'\dots A_n'V$. Těleso ohraničené stejnolehlými mnohoúhelníky $A_1A_2A_3\dots A_n$, $A_1'A_2'A_3'\dots A_n'$ a lichoběžníky $A_iA_{i+1}A_{i+1}'A_i'$ ($i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$), $A_nA_1A_1'A_n'$ nazýváme komolý jehlan, popsané lichoběžníky tvoří jeho plášť a uvedené 2 stejnolehlé mnohoúhelníky jeho podstavy.



Def.: Necht' je dán kužel vrcholem V a podstavou K , necht' $k > 0, k \neq 1, k \in R$. Necht' je dán jeho obraz ve stejnolehlosti se středem V a koeficientem k , kde obrazem kruhu K je kruh K' . Množinu všech bodů všech úseček XX' , kde $X \in K, X' = H_{V,k}(X)$, nazýváme komolým kuželem. Kruhy K a K' jsou podstavy komolého kužele. Úsečky XX' , pro které je X bodem hraniční kružnice kruhu K , tvoří plášť komolého kužele.

Def.: Komolý jehlan, který dostaneme z pravidelného jehlanu, se nazývá pravidelný komolý jehlan. Komolý kužel, který dostaneme z rotačního kužele, se nazývá rotační komolý kužel.

Def.: Vzdálenost hlavního vrcholu jehlanu od roviny jeho podstavy je výška jehlanu, vzdálenost vrcholu kužele od roviny jeho podstavy je výška kužele.

Pozn.: Objem kužele nebo jehlanu závisí pouze na výšce v a obsahu P jeho podstavy.

V.16.1: Pro objem V jehlanu nebo kužele o výšce v a obsahu podstavy P platí: $V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot v$.

V.16.2: Pro objem V komolého jehlanu nebo komolého kužele s obsahem podstav P_1, P_2 a s výškou w platí: $V = \frac{1}{3} \cdot (P_1 + \sqrt{P_1 \cdot P_2} + P_2) \cdot w$.

Pro komolý kužel s poloměry podstav r_1, r_2 a s výškou w platí:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \cdot w.$$

§17. Mnohostěny, Eulerova věta

Def.: Mnohostěnem rozumíme takovou omezenou a konvexní část prostoru (jež není částí roviny), do které patří i její hranice, přičemž je tato hranice tvořena konečným počtem mnohoúhelníků. Tyto mnohoúhelníky se nazývají stěny a jejich strany hrany mnohostěnu. Vrcholy hraničních mnohoúhelníků jsou vrcholy mnohostěnu. Každá hrana mnohostěnu je průnikem právě dvou jeho stěn, které se nazývají sousedními stěnami mnohostěnu.

Pozn.: a) Každý mnohostěn lze rozložit na konečný počet čtyřstěnů, ale sjednocením konečného počtu čtyřstěnů nemusí být vždy mnohostěn.
b) Někdy se za mnohostěny považují i nekonvexní útvary.
c) Mnohostěny se někdy nazývají polyedry.

V.17.1.: Eulerova věta:

Označíme-li v mnohostěnu s počet jeho stěn, h počet hran a v počet vrcholů, pak platí:

$$s - h + v = 2$$

$$s + v = h + 2$$

Pozn.: Pravidelné mnohostěny = Platónská tělesa: Mnohostěny, jejichž stěny jsou tvořeny navzájem shodnými pravidelnými mnohoúhelníky. Existuje jich právě 5:

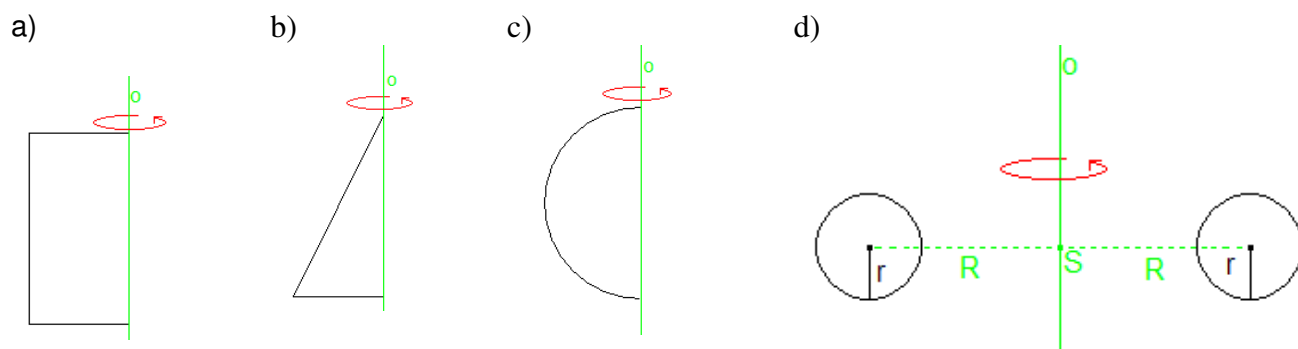
pravidelný mnohostěn	tvar stěny	v	s	h	
čtyřstěn	rs trojúhelník	4	4	6	tetraedr
šestistěn (krychle)	čtverec	8	6	12	hexaedr
osmistěn	rs trojúhelník	6	8	12	oktaedr
dvanáctistěn	prav. 5ti-úhelník	20	12	30	dodekaedr
dvacetistěn	rs trojúhelník	12	20	30	íkosaedr

§18. Rotační tělesa

Def.: O tělesu M v prostoru říkáme, že má přímku p za svou osu rotace a že je rotačním tělesem, jestliže se zobrazí samo na sebe při každém otočení kolem přímky p .

Pozn.: Druhy rotačních těles:

- a) Rotační válec – vznikne rotací pravoúhelníku kolem jeho jedné strany
- b) Rotační kužel – vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jeho jedné z odvěsen
- c) Koule – vznikne rotací půlkruhu nad průměrem kolem tohoto průměru (hranicí koule je kulová plocha, nebo-li sféra)
- d) Torus (anuloid, kruhový prstenec) – vznikne rotací kruhu s poloměrem r kolem osy ležící v rovině tohoto kruhu ve vzdálenosti R , kde $R > r$, od středu kruhu.



V.18.1.: Objem a povrch koule o poloměru r je:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3, \quad S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Pozn.: Vzorce pro objem a povrch částí koule:

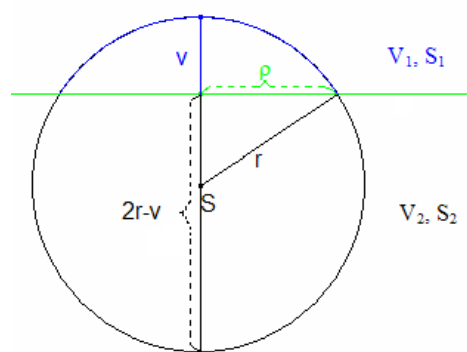
Nechť je koule rozdělena rovinou, která dělí její průměr délky $2r$ na dvě úsečky délek v a $2r-v$. Objemy obou částí koule, na které je koule touto rovinou rozdělena (tzv. kulových úsečí), jsou:

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho^2 \cdot v + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot v^2 \cdot (3r - v)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho^2 \cdot (2r - v) + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2r - v}{2}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2r - v)^2 \cdot (r + v), \text{ protože}$$

$$\rho^2 = r^2 - (r - v)^2 = v \cdot (2r - v).$$



Pro povrchy obou kulových úsečí platí:

$$S_1 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v + \pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot v \cdot (4r - v)$$

$$S_2 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (2r - v) + \pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot (2r - v) \cdot (2r + v).$$

Odečteme-li od S_1 a S_2 obsah kruhu o poloměru ρ , dostaneme povrchy příslušných kulových vrchlíků, které jsou $2 \cdot \pi \cdot r \cdot v$ a $2 \cdot \pi \cdot r \cdot (2r - v)$. Kulový vrchlík je plášť kulové úseče.